О ДУФФУЗИИ ФОТОНОВ ЧЕРЕЗ РАССЕИВАЮЩУЮ СРЕДУ В СВЯЗИ С ПРИМЕНЕНИЕМ К НЕКОТОРЫМ АСТРОФИЗИЧЕСКИМ ВОПРОСАМ*

Для некоторых задач астрофизики важно уметь дать ответ на следующие вопросы:

1. Пусть мы имеем поток световых квантов, проходящих через рассеивающую среду заданной оптической толщины. Каково среднее число рассеяний, испытываемых каждым световым квантом при диффузии через всю рассеивающую среду?

2. Каково среднее время, которое затрачивается световым квантом на диффузию через рассеивающую среду?

Мы решим эти вопросы для двух моделей, представляющих астрофизический интерес.

§ 1. Пусть рассеивающий слой представляет собой материю, заключенную между двумя концентрическими сферами с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). Пусть в общем центре этих сфер находится источник монохроматического излучения („звезда“) частоты ν. Пусть далее $R_2 - R_1 \ll R_1$. Мы получаем известную геометрическую модель Милна, предложенную им для применения к планетарным туманностям.

Очевидно среднее число n рассеяний одного кванта при диффузии можно получить следующим образом. Рассмотрим случай лучевого равновесия. Тогда полное количество квантов, выходящих в единицу времени из туманности, постоянно. Оно равно $4\pi R_2^2 \dfrac{H_0}{h\nu}$, где H_0 есть поток в рассматриваемой частоте, исходящий из единицы поверхности на внешней границе, и h — постоянная Планка. С другой стороны, пусть N_s будет полное число всех рассеяний, происходящих во всей туманности в единицу времени. Очевидно при равновесии искомое среднее число рассеяний будет:

$$n = \frac{N_s}{4\pi R^2 \dfrac{H_0}{h\nu}}. \tag{1}$$

---

* Уч. зап. ЛГУ, № 22, 14, 1938.

Задача заключается поэтому в подсчете N_s. В силу условия лучевого равновесия количество рассеянной энергии, излучаемой некоторым объемом dV на расстоянии R от центра, будет:

$$\sigma\rho\, dV \left\{ \int I d\omega + \pi S e^{-(\tau_1-\tau)} \right\} = 4\pi B\sigma\rho\, dV.$$

Здесь σ — коэффициент рассеяния, отнесенный к единице массы, ρ — плотность, I — интенсивность диффузного излучения „туманности", $d\omega$ — элемент телесного угла, πS — количество излучения, падающего от центральной звезды в рассматриваемой частоте в единицу времени на внутреннюю границу туманности, и

$$\tau = \int_R^{R_2} \sigma\rho dR; \qquad \tau_1 = \int_{R_1}^{R_2} \sigma\rho\, dR,$$

т. е. τ — оптическая глубина, отсчитанная от внешней границы; τ_1 — полная оптическая толща рассеивающего слоя.

Таким образом, полное количество энергии, излучаемой в единицу времени во всех частях „туманности", равно:

$$4\pi \int\int\int B\sigma\rho\, dV = 16\pi^2 R_1^2 \int B\sigma\rho\, dR = 16\pi^2 R_1^2 \int_0^{\tau_1} B(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Количество квантов, излучаемых в единицу времени, во всей туманности получится делением этой величины на $h\nu$. Поэтому из (1) и (2) получаем для среднего числа рассеяний:

$$n = 4\pi \frac{\int_0^{\tau_1} B_\nu(\tau)\, d\tau}{H_\nu(0)}. \tag{3}$$

Милн дал решение уравнений лучевого равновесия для этой проблемы. Его решение, выполненное в эддингтоновском приближении, дает:

$$\left.\begin{aligned} B_\nu &= S\left\{\frac{3}{4}\tau + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-\tau_1} - \frac{1}{2} e^{-(\tau_1-\tau)}\right\}, \\ H_\nu(0) &= \pi S\,(1 - e^{-\tau_1}). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

На самом деле, однако, полученное Милном выражение для $H_\nu(0)$ характеризует диффузное излучение, т. е. дает поток квантов, потерпевших хотя бы одно рассеяние. Между тем для того, чтобы получить среднее число рассеяний одного кванта, мы должны учесть и те случаи, когда квант проходит через туманность, не испытывая ни одного рассеяния. Это будут кванты, входящие в прямое излучение звезды, прошедшие через всю туманность. Поток от прямого излучения на внешней границе будет равен $\pi S e^{-\tau_1}$. Поэтому для полного потока H'_ν мы имеем естественно:

$$H'_\nu(0) = \pi S$$

и, на основании (3) и (4),

$$n = \frac{3}{2}\tau_1^2 + (2 + e^{-\tau_1})\tau_1 - 2(1 - e^{-\tau_1}). \qquad (5)$$

Когда $\tau_1 \gg 1$, мы можем принять асимптотическую формулу:

$$n = \frac{3}{2}\tau_1^2. \qquad (6)$$

Вывод этой формулы и являлся нашей целью. Для того чтобы сосчитать среднее время, в течение которого световой квант диффундирует через туманность, достаточно разделить полную энергию всех квантов данной частоты ν, содержащихся в туманности в состоянии лучевого равновесия, на полную энергию, испускаемую поверхностью туманности в единицу времени в рассматриваемой частоте.

При подсчете первой из этих величин нужно считать не только энергию всех квантов, путешествующих в данную минуту по туманности, но также и энергию всех поглощенных в данный момент квантов. В тех случаях, когда временем нахождения кванта в поглощенном состоянии можно пренебречь по сравнению со средним временем их жизни от испускания до последующего поглощения, достаточно учесть только „явную энергию" поля излучения. В этом случае очевидно, что среднее время T пребывания кванта в туманности получится простым умножением числа рассеяний на средний промежуток времени t между двумя рассеяниями:

$$T = nt = \frac{3}{2}\tau_1^2 t.$$

Очевидно, среднее время между двумя рассеяниями определяется через:

$$t = \frac{l}{c},$$

где l — средняя свободная длина пути светового кванта. Если плотность в туманности меняется как функция R, то и l будет меняться.

Если l постоянно, мы получаем:

$$T = \frac{3}{2} \tau_1^2 \frac{l}{c}. \tag{7}$$

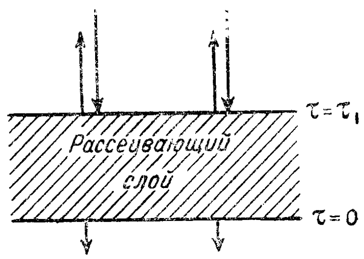
Легко видеть, что средняя свободная длина пути светового кванта равна такому отрезку, что отсчитанная вдоль него оптическая толщина равна единице. В случае равномерной плотности мы имеем поэтому:

$$l = \frac{R_2 - R_1}{\tau_1}.$$

Отсюда (7) перепишется в виде:

$$T = \frac{3}{2} \tau_1 \frac{R_2 - R_1}{c}. \tag{8}$$

Итак, время, в течение которого световой квант диффундирует через рассеивающую туманность, равно времени, в течение которого свет проходит линейную толщину туманности, умноженному на $3/2\,\tau_1$. Совершенно аналогично предыдущему можно рассмотреть случай, когда фотон возникает между двумя плоскопараллельными слоями оптической толщины τ_1, диффундирует через них и проходит наружу. Наконец, можно рассмотреть случай, когда источники рассеиваемых фотонов распределены по самой туманности и не сосредоточены в центре.



В первом случае мы получим опять формулу (6). Во втором случае появится некоторый числовой множитель, зависящий от распределения источников по туманности. Однако этот множитель будет очень близок к единице, если источники фотонов расположены преимущественно во внутренних слоях туманности.

§ 2. Рассмотрим теперь диффузию фотонов в том случае, когда рассеивающий слой находится по одну сторону от источника фотонов, как это показано на чертеже. Пусть на рассеивающий слой оптической толщины τ_1 падают с одной стороны фотоны. Если τ_1 велико, то большая часть их отражается диффузно назад и только небольшая часть пробивается через слой. Такого типа рассеяние мы имеем в образующих слоях Солнца и звезд. Легко сразу физически понять, что число рассеяний для каждого *прошедшего* через слой фотона должно быть на этот раз меньше.

В самом деле, пробиваются через слой именно те фотоны, которые случайно уже при небольшом числе рассеяний проникнут глубоко в рассеивающий слой. Происходит своего рода „отбор“ тех фотонов, которые с самого начала имели мало рассеяний. Наоборот, те фотоны, которые терпят рассеяние в самом начале слоя, имеют больше шансов быть отраженными назад.

Расчет может быть произведен следующим образом. Прежде чем достигнуть $\tau = 0$, фотон должен пересечь поверхность $\tau = \frac{\tau_1}{2}$. С другой стороны, фотон, достигший поверхности $\tau = \frac{\tau_1}{2}$, имеет равную вероятность выхода из слоя в обоих направлениях. Число рассеяний, которое испытывает фотон после первого пересечения поверхности $\tau = \frac{\tau_1}{2}$, очевидно, поэтому равно $\frac{3}{2}\left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2$, так как в этом случае мы имеем задачу, аналогичную рассмотренной в § 1 задаче о туманности. Но прежде чем достигнуть поверхности $\tau = \frac{\tau_1}{2}$, фотон должен пересечь поверхность $\tau = \frac{3}{4}\tau_1$. Число рассеяний, испытываемых фотоном на пути от $\tau = \frac{3\tau_1}{4}$ до $\tau = \frac{\tau_1}{2}$, будет равно, на основании предыдущего параграфа, $\frac{3}{2}\left(\frac{\tau_1}{4}\right)^2$ и т. д.

Итак, среднее полное число всех рассеяний, испытываемых фотоном, выходящим наружу, будет:

$$n = \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_1}{4}\right) + \left(\frac{\tau_1}{8}\right)^2 + \cdots\right\} = \frac{1}{2}\tau_1^2. \tag{9}$$

Так же, как в предыдущем параграфе, отсюда можно получить и среднее время пребывания фотона в рассеивающем слое.

§ 3. Интересен результат применения формулы (6) к газовым туманностям. В этом случае мы знаем, что фотоны, принадлежащие к линии L_α, действительно диффундируют через туманность, испытывая чистое рассеяние и не подвергаясь изменению частоты. Правда, источником квантов является не непосредственно звезда. Они образуются внутри туманности из L_c-квантов. Но это не должно влиять качественным образом на результат, и мы для получения порядка величины можем применить формулу (6). Оптическая толщина планетарной туманности в линии L_α не меньше 10^4 и вероятно порядка 10^5. Следовательно, число рассеяний каждого фотона будет порядка 10^{10}.

Если считать, что время, в течение которого свет проходит толщу планетарной туманности, достигает 1/10 года, то $T = 10^4$ лет.

Для диффузной газовой туманности, где время прохождения нерассеиваемого света через толщу туманности порядка года или даже нескольких лет, время, в течение которого фотоны L_α диффундируют через туманность, будет порядка 10^5 лет.

Эти цифры представляют тот интерес, что, вероятно, возраст туманности не во много раз больше них.

§ 4. Рассмотрим рассеивающий слой, который обладает также способностью производить истинное поглощение, причем коэффициент истинного поглощения $\varkappa$ мал по сравнению с коэффициентом рассеивания σ. Очевидно на каждое рассеяние будет приходиться $\frac{\varkappa}{\sigma}$ поглощений. Таким образом, пользуясь (9), мы можем сказать, что полное число всех поглощений при диффузии светового кванта, выходящего из фотосферы и проходящего через рассеивающий слой, будет порядка $\frac{1}{2}\frac{\varkappa}{\sigma}\tau_1^2$. Очевидно, если $\frac{1}{2}\frac{\varkappa}{\sigma}\tau_1^2 \ll 1$, то мы можем пренебречь влиянием истинного поглощения. В противном случае его нужно учитывать, так как даже небольшое число поглощений приводит к изменению частоты. Таким образом, критерием возможности пренебречь влиянием истинного поглощения является выполнение неравенства

$$\sqrt{\frac{2\sigma}{\varkappa}} \gg \tau_1. \qquad (10)$$

Этот результат может быть получен также из теории лучевого равенства при одновременном действии поглощения и излучения, но важно иметь критерий без наличия полной теории вопроса.

Примечания. 1. В 1948 г. В. Амбарцумян снова обратился к вопросам, затронутым в настоящей статье. В работе „О числе рассеяний при диффузии фотонов в мутной среде" (стр. 281 этого сборника) им дан новый способ для определения числа рассеяний.

2. Произведенная выше оценка средней продолжительности пребывания L_α-кванта в газовой туманности не может быть принята в настоящее время (см. примечание на стр. 47).